

Learning signal processing in Persian language

Step 6: Continues Wavelet Transform

ساناز جواهریان

دانش‌آموخته کارشناسی ارشد مهندسی پزشکی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تهران

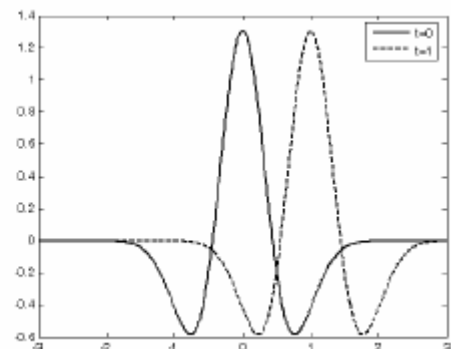
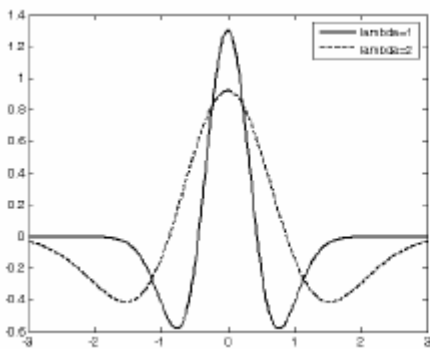
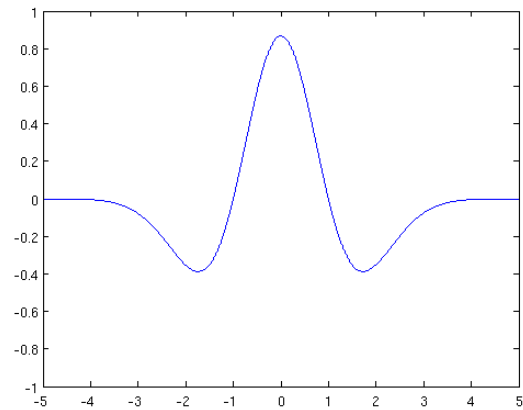
تبدیل ویولت پیوسته سیگنال $x(t)$ به صورت زیر تعریف میشود :

$$\mathcal{W}_x(a, b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \Psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$$

با توجه به رابطه بالا، تبدیل ویولت از ضرب داخلی $x(t)$ با تابع انتقال یافته و مقیاس شده ی $\Psi(t)$ که با نام ویولت مادر میشناسیم، بدست می آید.

در رابطه ی بالا پارامتر a نشانگر مقیاس یا scale و پارامتر b نشانگر انتقال یا translation در تبدیل ویولت هستند؛ یعنی با تغییر a میتوانیم بهنای باند مورد نظر را تعیین کنیم و با تغییر b میتوانیم در طول محور زمان حرکت کنیم؛ عبارت $|a|^{-\frac{1}{2}}$ نیز برای اطمینان از داشتن انرژی یکسان در همه ی توابع مقیاس شده در رابطه ی ویولت منظور شده است.

در شکل زیر نحوه تغییر scale و translation برای تابع ویولت کلاه مکزیکی آورده شده است:



سمت راست translation و سمت چپ scale يك ويولت

میتوانیم $\Psi(t)$ را به عنوان پاسخ ضربه میانگذر عنوان کنیم چون با تغییر پارامتر مقیاس a ، مرکز فرکانسی و پهنای باند میانگذر تحت تاثیر قرار میگیرند، این مفهوم به عنوان غربالگری فرکانسی ویولت در مقیاس های متفاوت می باشد.

رزولوشن زمانی و فرکانسی تبدیل ویولت به مقدار a بستگی دارد، یعنی برای آنالیز فرکانس های بالا مقدار a کوچکتر موجب رزولیشن زمانی بالا ولی رزولیشن فرکانسی پایین میشود؛ از طرف دیگر برای آنالیز فرکانس های پایین مقدار a بزرگ موجب رزولیشن زمانی پایین ولی رزولیشن فرکانسی بالا میشود که همان مفهوم MRA است؛ این در حالی است که STFT آنالیزی با پهنای باند ثابت برای تمامی محدوده های فرکانسی داشت.

به آنالیز ویولت، اغلب آنالیز زمان-مقیاس گفته میشود بر خلاف STFT که یک آنالیز زمان-فرکانس بود، چون تابع آنالیز $\Psi(t)$ مقیاس میشود و همانند STFT مدوله شده نمیشود.

بار دیگر رابطه ی تبدیل ویولت را در نظر بگیرید.

اگر سیگنال مورد بررسی در حوزه ی زمان مقیاس شود، یعنی $x(t) \rightarrow x(\frac{t}{c})$ در این صورت تبدیل ویولت آن نیز مقیاس شده و هیچ تغییر دیگری نمیکند و بصورت $\mathcal{W}_t(a, b) \rightarrow \mathcal{W}_{\frac{t}{c}}(a, b)$ در می آید، این ویژه گی ناشی از خاصیت affine invariant تبدیل ویولت میباشد.

بعلاوه تبدیل ویولت shift invariant نیز میباشد؛ یعنی انتقال در حوزه ی زمان به مقدار t_0 منجر به انتقال شکل تبدیل ویولت در حوزه ی زمان مقیاس به مقدار t_0 در راستای محور زمان میشود به بیان ریاضی $x(t) \rightarrow x(t - t_0)$

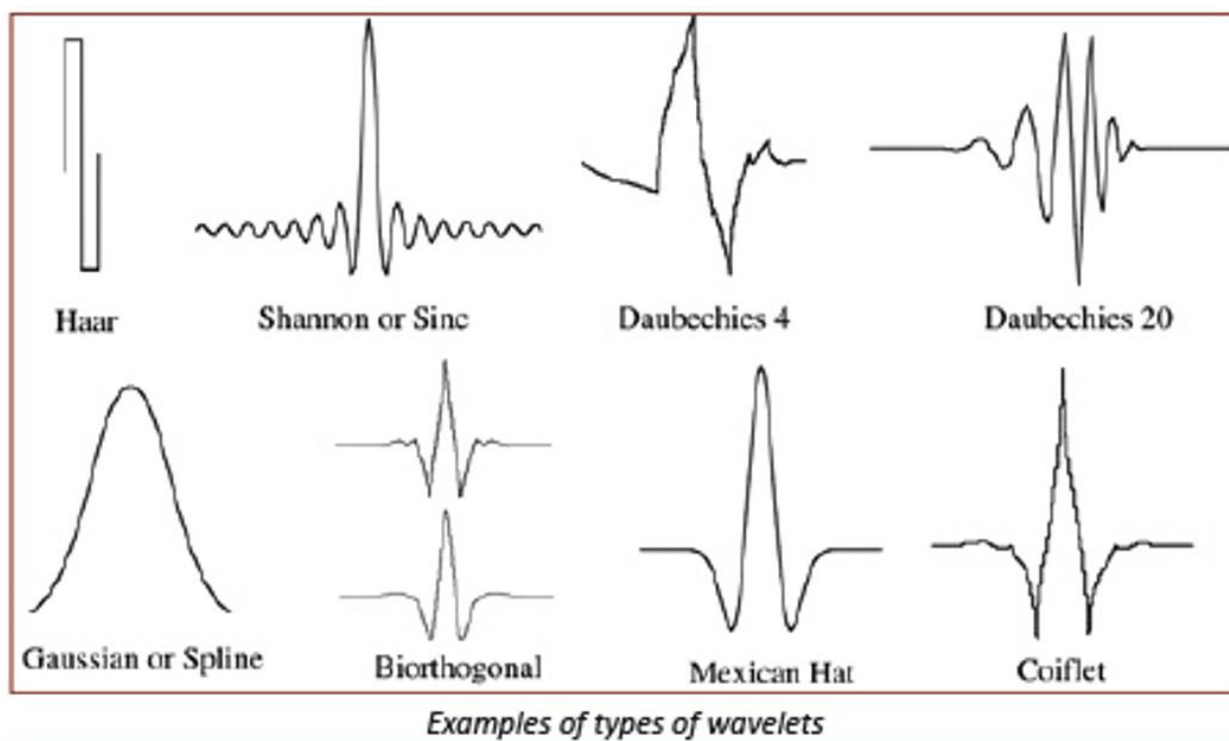
در حوزه ی زمان منجر به $\mathcal{W}_t(a, b) \rightarrow \mathcal{W}_{t-t_0}(a, b)$ در حوزه ی ویولت خواهد شد . زمانی که از یک تبدیل برای نمایش سیگنال در فضای دیگری استفاده میکنیم باید بتوانیم که سیگنال را از فضای مربوطه دوباره به فضای زمانی برگردانیم.

برای تبدیل ویولت اگر شرط admissibility condition برای تابع مادر ویولت برقرار باشد، میتوان هر تابعی را با استفاده این تابع مادر به فضای ویولت برده و سپس به فضای زمانی برگردانند. این شرط در داشتن تبدیل فوریه محدود برای تابع ویولت مادر را بررسی میکند:

$$\text{admissibility condition : } \int \frac{|\psi(f)|^2}{|f|} df < \infty$$

در واقع میگوید که شدت رشد مولفه های فرکانسی تابع ویولت در فضای فوریه باید بیشتر از شدت رشد خود فرکانس باشد، در این شرایط انباشتگی مولفه های فرکانسی در فضای فوریه را داریم که به معنای چگالی فرکانسی است؛ بدیهی است که ضرایب این تابع مادر ویولت در فضای زمان-مقیاس نیز در بعضی از مقیاس انباشته شود، که مطلوب ماست؛ محققان انباشتگی ضرایب در بعضی از مقیاس ها را تحت عنوان Sparsity بیان میکنند.

توابع مادر ویولت زیادی ارائه شده اند که در زیر تعدادی از آنها را آورده ایم:



در موارد خاص و بنا به کاربرد میتوانیم خودمان توابع مادر جدیدی را ارائه کنیم.

برای این کار باید تابعی که به عنوان تابع مادر معرفی میکنیم شش شرط زیر را داشته باشد:

شرط اول

انرژی تابع ویولت مادر ارائه شده در حوزه ی زمان صفر باشد.

به بیان ریاضی یعنی:

$$\Psi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(t)|^2 dt = 0$$

شرط دوم

شرط *Admissibility constant* برای تابع مادر معرفی شده باید برقرار باشد؛ یعنی تبدیل فوریه ای محدود داشته باشد در این صورت است که ضرایب تبدیل ویولت در فضای زمان-مقیاس Sparse میشوند.

شرط سوم

در توابع ویولت مختلط باید تبدیل فوریه حقیقی موجود و قسمت موهومی باید با شدت بالایی به سمت صفر برود.

شرط چهارم

تابع مادر ارائه شده باید پرریزیک باشد

شرط پنجم

تابع مادر باید، هم در حوزه ی زمان و هم در حوزه ی فرکانس دارای پهنای باند محدود باشد

شرط ششم

مقدار *DC* نداشته باشد

References

1. Akbari, H., M.T. Sadiq, and A.U. Rehman, Classification of normal and depressed EEG signals based on centered correntropy of rhythms in empirical wavelet transform domain. Health Information Science and Systems, 2021. 9(1): p. 1-15.
2. Akbari, H. and M.T. Sadiq, Classification of Seizure and Seizure Free EEG Signals Based on second-order difference plot of DWT coefficients. 2020.

3. Akbari, H., Classification of Seizure and Seizure Free EEG Signals using Geometrical features derived from Poincaré plot, and binary particle swarm optimization.
4. Akbari, H., S.S. Esmaili, and S.F. Zadeh, Classification of seizure and seizure-free EEG signals based on empirical wavelet transform and phase space reconstruction. arXiv preprint arXiv:1903.09728, 2019.
5. Ghofrani, S. and H. Akbari. Comparing nonlinear features extracted in EEMD for discriminating focal and non-focal EEG signals. in Tenth International Conference on Signal Processing Systems. 2019. International Society for Optics and Photonics.
6. Akbari, H. and M.T. Sadiq, Detection of focal and non-focal EEG signals using non-linear features derived from empirical wavelet transform rhythms. Physical and Engineering Sciences in Medicine: p. 1-15.
7. Akbari, H., S. Saraf Esmaili, and S. Farzollah Zadeh, Detection of Seizure EEG Signals Based on Reconstructed Phase Space of Rhythms in EWT Domain and Genetic Algorithm. Signal Processing and Renewable Energy, 2020. 4(2): p. 23-36.
8. Akbari, H. and S. Ghofrani, Fast and accurate classification f and nf EEG by using sodp and EWT. International Journal of Image, Graphics and Signal Processing (IJIGSP), 2019. 11(11): p. 29-35.
9. Hussain, W., et al., Epileptic seizure detection using 1 D-convolutional long short-term memory neural networks. Applied Acoustics, 2021. 177: p. 107941.
10. Sadiq, M.T., X. Yu, and Z. Yuan, Exploiting dimensionality reduction and neural network techniques for the development of expert brain–computer interfaces. Expert Systems with Applications. 164: p. 114031.
11. Sadiq, M.T., et al., Identification of Motor and Mental Imagery EEG in Two and Multiclass Subject-Dependent Tasks Using Successive Decomposition Index. Sensors, 2020. 20(18): p. 5283.
12. Sadiq, M.T., et al., A Matrix Determinant Feature Extraction Approach for Decoding Motor and Mental Imagery EEG in Subject Specific Tasks. IEEE Transactions on Cognitive and Developmental Systems, 2020.
13. Sadiq, M.T., et al., Motor imagery BCI classification based on novel two-dimensional modelling in empirical wavelet transform. Electronics Letters, 2020.
14. Sadiq, M.T., et al., Motor imagery EEG signals classification based on mode amplitude and frequency components using empirical wavelet transform. IEEE Access, 2019. 7: p. 127678-127692.
15. Sadiq, M.T., et al., Motor Imagery EEG Signals Decoding by Multivariate Empirical Wavelet Transform-Based Framework for Robust Brain–Computer Interfaces. IEEE Access, 2019. 7: p. 171431-171451.
16. Arianpour, Y., S. Ghofrani, and H. Amindavar. Locally nonlinear regression based on kernel for pose-invariant face recognition. in 2012 11th International Conference on Information Science, Signal Processing and their Applications (ISSPA). 2012. IEEE.
17. Sharma, M. and U.R. Acharya, Automated detection of schizophrenia using optimal wavelet-based l1 norm features extracted from single-channel EEG. Cognitive Neurodynamics, 2021: p. 1-14.

18. Sharma, M., et al., An automated diagnosis of depression using three-channel bandwidth-duration localized wavelet filter bank with EEG signals. *Cognitive Systems Research*, 2018. 52: p. 508-520.
19. Sharma, M., et al., An automatic detection of focal EEG signals using new class of time–frequency localized orthogonal wavelet filter banks. *Knowledge-Based Systems*, 2017. 118: p. 217-227.
20. Sharma, M., et al., Dual-tree complex wavelet transform-based features for automated alcoholism identification. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2018. 20(4): p. 1297-1308.
21. Sharma, M., R.B. Pachori, and U.R. Acharya, A new approach to characterize epileptic seizures using analytic time-frequency flexible wavelet transform and fractal dimension. *Pattern Recognition Letters*, 2017. 94: p. 172-179.
22. Sharma, M. and R.B. Pachori, A novel approach to detect epileptic seizures using a combination of tunable-Q wavelet transform and fractal dimension. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, 2017. 17(07): p. 1740003.
23. Sharma, M., D. Deb, and U.R. Acharya, A novel three-band orthogonal wavelet filter bank method for an automated identification of alcoholic EEG signals. *Applied Intelligence*, 2018. 48(5): p. 1368-1378.